

 SESSION 2025**Baccalauréat de l'Enseignement Général — Série S**
Épreuve de Mathématiques

Durée : 4 heures — Coefficient : 6

*Les exercices et les problèmes sont obligatoires.***Exercice 1**

3 points

Partie ASoient A et B deux matrices carrées d'ordre 3 définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Calculer $A \times B$ et $B \times A$. (0,25 pt $\times$ 2)
(b) Que peut-on en conclure pour les deux matrices A et B ? (0,25 pt)
2. On considère le système (S) :

$$\begin{cases} y - z = -3 \\ x + 3z = 17 \\ x + y + z = 11 \end{cases}$$

- (a) Écrire ce système sous forme matricielle : $AX = Y$. (0,25 pt)
- (b) Déterminer la matrice X . (0,5 pt)

Partie B

1. Déterminer le reste de la division de 7×3^{100} par 11. (0,5 pt)
2. (a) Donner une solution particulière de l'équation : $23x - 17y = 1$. (0,25 pt)
(b) En déduire la résolution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation : $23x - 17y = 2$. (0,75 pt)

Exercice 2

2 points

Dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Écrire une équation paramétrique de la droite (D) passant par le point $A(2; -1; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3; -2; 1)$. (0,25 pt)

2. Soit (D') la droite d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = 5t - 8 \\ z = -2t + 6 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (a) Montrer que (D) et (D') sont orthogonaux. (0,75 pt)
 (b) Déterminer les coordonnées du point I intersection de (D) et (D') . (0,25 pt)
 3. Écrire une équation cartésienne du plan (P) contenant les deux droites (D) et (D') . (0,75 pt)

Problème 1

7 points

Le plan (P) étant orienté. On considère un carré direct $ABCD$ de centre O tel que $AB = 4\text{cm}$.

I étant le point défini par $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. Soit J un point tel que AJO est un triangle rectangle en A avec $(\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AO}) = \frac{\pi}{2}$ et $AJ = 4\sqrt{2}\text{cm}$.

On note par :

- r : la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$
- h : l'homothétie de centre I et de rapport $\sqrt{2}$

On pose $S = h \circ r$.

Partie A

- Faire une figure et construire les points I et J . (0,75 pt)
- Déterminer et construire le point $G = \text{bar}\{(J, 1); (O, -4)\}$. (0,25 pt $\times$ 2)
 - Déterminer et construire l'ensemble $(\Gamma) = \{M \in (P) \mid \|\overrightarrow{MJ}\|^2 - 4\|\overrightarrow{MO}\|^2 = 0\}$. (0,25 pt $\times$ 2)
- Déterminer et construire l'ensemble $(\Gamma') = \{M \in (P) \mid \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0\}$. (0,25 pt $\times$ 2)
- Déterminer le rapport et un angle de S . (0,25 pt $\times$ 2)
 - Calculer $S(A)$. Conclure. (0,25 pt $\times$ 2)
 - Montrer que le point A est un point d'intersection de (Γ) et (Γ') . (0,25 pt + 0,25 pt)

Partie B

Le plan (P) est maintenant muni d'un repère orthonormé direct $(A, \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\vec{u} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$.

1. Déterminer l'affixe des points O, I, J et G . (0,25 pt $\times$ 4)
2. (a) Déterminer l'expression complexe de r et h . (0,25 pt $\times$ 4)
 (b) En déduire l'expression complexe, la nature et les éléments caractéristiques de S . (0,25 pt $\times$ 2)
3. Montrer que le point A est un point d'intersection de (Γ) et (Γ') . (0,75 pt)

Problème 2

8 points

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-x} - 1, & \text{si } x \leq 0 \\ x(1 - \ln x), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Notons par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1cm.

Partie I

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$. (0,25 pt + 0,75 pt)
2. (a) Étudier les variations de f sur $]-\infty; 0]$ et sur $]0; +\infty[$. (0,5 pt $\times$ 2)
 (b) Dresser le tableau de variation de f sur $]-\infty; +\infty[$. (1 pt)
3. Étudier les branches infinies de $(\mathcal{C})$. (0,25 pt $\times$ 2)
4. Construire la courbe $(\mathcal{C})$ en précisant la tangente ou les demi-tangentes au point d'abscisse $x_0 = 0$. (1,25 pt)

Partie II

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* : U_n = \frac{1}{n!} \int_{-1}^0 (x+1)^n e^{-x} dx$.

1. (a) Calculer U_1 . (0,25 pt)
 (b) Interpréter géométriquement ce résultat. (0,25 pt)
2. (a) En utilisant un encadrement de e^{-x} sur l'intervalle $[-1; 0]$, donner un encadrement de U_n . (0,25 pt)
 (b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$. (0,25 pt)
3. En utilisant une intégration par parties, vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^* : U_{n+1} = U_n - \frac{1}{(n+1)!}$. (1,5 pt)

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$. (0,75 pt)