

✓ CORRIGÉ — SESSION 2026

Baccalauréat Série S — Mathématiques

*Corrigé détaillé, rédigé comme une copie ;
entre crochets, les points du barème officiel.*

Exercice 1

3 points

I. Calcul matriciel

1. (a) [0,5 pt] A est triangulaire supérieure : son déterminant est le produit des coefficients diagonaux, $\det A = 1 \times 1 \times 1 = 1 \neq 0$. A est **inversible**.

(b) [0,5 pt] $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $2A - A^2 = \begin{pmatrix} 2-1 & 0 & 4-4 \\ 0 & 2-1 & 6-6 \\ 0 & 0 & 2-1 \end{pmatrix} = I_3$.

Alors $A(2I_3 - A) = I_3$:

$$P = 2I_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

(on a aussi $PA = 2A - A^2 = I_3$).

2. [0,5 pt] *Initialisation.* $D^1 = ABP = AB^1P$.

Hérédité. Si $D^n = AB^nP$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$, alors, en utilisant $PA = I_3$:

$$D^{n+1} = D^n \times D = AB^nP \times ABP = AB^n(PA)BP = AB^nBP = AB^{n+1}P.$$

Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D^n = AB^nP$.

II. Probabilités

1. [0,5 pt] L'urne contient 3 « A », 5 « B » et 2 « C », tirages équiprobables parmi 10 : $\boxed{P(A) = \frac{3}{10}, P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{5}}$.

2. On répète 5 fois, de façon indépendante, une épreuve dont le « succès » (obtenir B) a la probabilité $\frac{1}{2}$: le nombre X de B obtenus suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(5; \frac{1}{2}\right)$.

(a) [0,5 pt] $P(F) = P(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$.

(b) [0,5 pt] Par l'événement contraire : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{31}{32}$.

Exercice 2

2 points

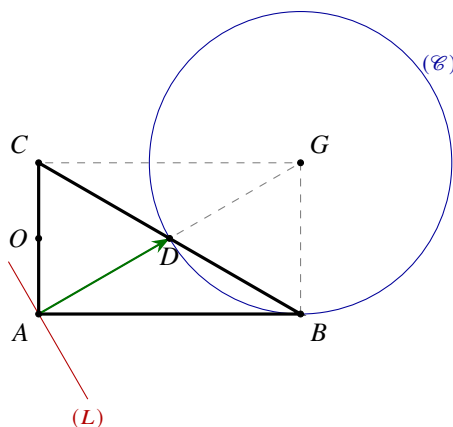
- [0,5 pt] Avec $\vec{n}(1; 1; -1)$: $\vec{n} \cdot \vec{u} = -1 + 2 - 1 = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = -4 + 2 + 2 = 0$; $\vec{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs (non colinéaires) qui dirigent (P) , il est donc normal à (P) . Enfin A vérifie $1 - 2 - 2 + 3 = 0$. $(P) : x + y - z + 3 = 0$.
- [0,5 pt] (D) est dirigée par $\vec{w}(-2; -2; 2) = -2\vec{n}$: $\vec{w}$ est normal à (P) , donc (D) est **perpendiculaire** à (P) .
 - [0,5 pt] On reporte dans l'équation de (P) : $(-2t + 1) + (-2t + 3) - (2t - 5) + 3 = -6t + 12 = 0$, d'où $t = 2$ et $\boxed{F(-3; -1; -1)}$ (contrôle : $-3 - 1 + 1 + 3 = 0$).
- [0,5 pt] A et F sont dans (P) , et $(D) \perp (P)$ en F , donc $(AF) \perp (D)$: F est le projeté orthogonal de A sur (D) (contrôle : $\overrightarrow{AF}(-4; 1; -3)$ et $\overrightarrow{AF} \cdot \vec{w} = 8 - 2 - 6 = 0$). La perpendiculaire à (D) issue de A est (D') $= (AF)$, et la distance cherchée est

$$d(A, (D)) = AF = \sqrt{16 + 1 + 9} = \sqrt{26} \approx 5,10.$$

Remarque: Telle qu'elle est écrite, la question 3 est ambiguë : toutes les droites passant par A et orthogonales à (D) sont contenues dans (P) , et la distance de l'une d'elles à (D) varie de 0 (pour (AF) , qui coupe (D) en F) à $\sqrt{26}$. La réponse attendue est la distance du point A à la droite (D) , c'est-à-dire $AF = \sqrt{26}$.

Problème 1

7 points



Partie I

1. (a) [0,5 pt] D est le milieu de l'hypoténuse $[BC]$ du triangle rectangle ABC : c'est le centre du cercle circonscrit, donc $DA = DC = \frac{BC}{2} = 4$. Comme $CA = 4$, $CA = AD = DC$: **le triangle CAD est équilatéral.**
- (b) [0,5 pt] $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ et $\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$: $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$, et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = +\frac{\pi}{3}$ car ABC est direct. La similitude directe de centre C , de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$ envoie A sur B ($CB = 8 = 2CA$) et O sur D ($CD = 4 = 2CO$ et $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3}$). Une similitude directe étant déterminée par les images de deux points distincts, **S est la similitude de centre C , de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.**
2. [0,5 pt] La somme des angles est $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0$: g est une translation. On décompose en utilisant la droite (AC) , commune aux deux centres :

$$R_A = s_{(AC)} \circ s_{(L)}, \quad R_C = s_{(\Delta)} \circ s_{(AC)},$$

où (L) et (Δ) sont les droites passant respectivement par A et C , perpendiculaires à (AD) . En effet, dans le triangle équilatéral CAD , $((AC), (AD)) = -\frac{\pi}{3}$, donc $((L), (AC)) = -\frac{\pi}{6}$ et $2((L), (AC)) = -\frac{\pi}{3}$; de même $2((AC), (\Delta)) = \frac{\pi}{3}$. Alors $g = s_{(\Delta)} \circ s_{(AC)} \circ s_{(AC)} \circ s_{(L)} = s_{(\Delta)} \circ s_{(L)}$. $(L) \parallel (\Delta)$; (Δ) est la hauteur issue de C du triangle équilatéral, elle coupe (AD) au milieu K de $[AD]$. **g est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD}$.**

3. (a) [0,5 pt] $f = S \circ R_A$ est une similitude directe de rapport $2 \times 1 = 2$ et d'angle $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0$. Une similitude directe d'angle nul et de rapport $2 \neq 1$ est une homothétie : **f est une homothétie de rapport $k = 2$.**
- (b) [0,5 pt] $f(A) = S(R_A(A)) = S(A) = B$. Le centre Ω vérifie $\overrightarrow{\Omega B} = 2\overrightarrow{\Omega A}$, soit $2\overrightarrow{\Omega A} - \overrightarrow{\Omega B} = \vec{0}$: **Ω est le barycentre de $\{(A, 2); (B, -1)\}$ (c'est le symétrique de B par rapport à A).**
4. (a) [0,25 pt] Somme des coefficients : 1. En prenant A pour origine : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. **$ABGC$ est un rectangle** (parallélogramme avec un angle droit en A); G est le symétrique de A par rapport à D .
- (b) [0,5 pt] Dans le rectangle $ABGC$: $GA = BC = 8$, $GB = AC = 4$, $GC = AB = 4\sqrt{3}$. En introduisant G :

$$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = MG^2 - 64 + 16 + 48 = MG^2.$$

$M \in (\mathcal{C}) \iff MG = 4$: **$(\mathcal{C})$ est le cercle de centre G et de rayon 4** (il passe par B et D).

Partie II (unité 1 cm, car $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ et $OC = 2$ cm ; $z_O = 0$, $z_C = 2i$, $z_A = -2i$, $z_B = 4\sqrt{3} - 2i$)

1. (a) [0,5 pt] Dans le triangle équilatéral CAD , la médiane (DO) est aussi hauteur : $(OD) \perp (AC)$, donc D est sur l'axe réel, et $OD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$. D est du côté de B , d'abscisse positive : $\boxed{z_D = 2\sqrt{3}}$. (Ou : $z_D = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2}$.)
- (b) [0,5 pt] $S : z' = az + b$. $S(O) = D$ donne $b = 2\sqrt{3}$; $S(A) = B$ donne $-2ia + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} - 2i$, soit $a = \frac{2\sqrt{3} - 2i}{-2i} = 1 + i\sqrt{3}$: $\boxed{S : z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2\sqrt{3}}$. Rapport $|a| = 2$, angle $\arg a = \frac{\pi}{3}$, centre $\frac{b}{1-a} = \frac{2\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}} = 2i = z_C$: on retrouve I.1.b.
2. (a) [0,5 pt] Avec $e^{\pm i\pi/3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$:
 - $R_C : z' - 2i = e^{i\pi/3}(z - 2i)$, soit $z' = e^{i\pi/3}z + \sqrt{3} + i$;
 - $R_A : z' + 2i = e^{-i\pi/3}(z + 2i)$, soit $z' = e^{-i\pi/3}z + \sqrt{3} - i$;
 - $g(z) = e^{i\pi/3}(e^{-i\pi/3}z + \sqrt{3} - i) + \sqrt{3} + i$; comme $e^{i\pi/3}(\sqrt{3} - i) = \sqrt{3} + i$: $\boxed{g : z' = z + 2\sqrt{3} + 2i}$.
- (b) [0,75 pt] g est la translation de vecteur d'affixe $2\sqrt{3} + 2i = z_D - z_A$: **c'est la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.**
3. (a) [0,25 pt] $f(z) = (1 + i\sqrt{3})(e^{-i\pi/3}z + \sqrt{3} - i) + 2\sqrt{3}$. Or $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$, donc $(1 + i\sqrt{3})e^{-i\pi/3} = 2$, et $(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{3} + 2i$: $\boxed{f : z' = 2z + 4\sqrt{3} + 2i}$.
- (b) [0,5 pt] Forme $z' = kz + b$ avec $k = 2$ réel $\neq 1$: f est l'**homothétie de rapport 2 et de centre Ω** , avec $z_\Omega = \frac{b}{1-k} = -4\sqrt{3} - 2i = 2z_A - z_B$ (barycentre de $\{(A, 2); (B, -1)\}$, comme en I.3.b).
4. [0,75 pt] $\bar{S} : z' = a\bar{z} + b$ avec $|a| = |1 - i| = \sqrt{2} \neq 1$: $\bar{S}$ est une **similitude indirecte de rapport $\sqrt{2}$** .
Centre (seul point fixe) : avec $z = x + iy$, $(1 - i)(x - iy) = (x - y) - i(x + y)$, et $z' = z$ donne $x = x - y + 2$ et $y = -x - y + 4$, soit $y = 2$ et $x = 0$: **le centre est C ($z_C = 2i$).**
Axe : l'ensemble des points M tels que $\bar{S}(M) = h(M)$, où h est l'homothétie de centre C et de rapport $\sqrt{2}$: $(1 - i)\bar{z} + 2 + 4i = 2i + \sqrt{2}(z - 2i)$. La partie réelle donne $x - y + 2 = \sqrt{2}x$ (la partie imaginaire donne une équation équivalente) :

$$\text{axe : } y = (1 - \sqrt{2})x + 2,$$

droite passant par C et dirigée par un vecteur d'angle $\frac{1}{2} \arg(1 - i) = -\frac{\pi}{8}$ (car $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$).

Problème 2

8 points

Partie A

1. [0,5 pt] En $+\infty$: $f_n(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^n x^n e^{-x}$ avec $\left(\frac{x+1}{x}\right)^n \rightarrow 1$ et $x^n e^{-x} \rightarrow 0$ (croissances comparées) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ pour tout n .

En $-\infty$: $e^{-x} \rightarrow +\infty$ et $(x+1)^n \rightarrow +\infty$ si n est pair, $-\infty$ si n est impair. Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty$ si n est pair, $-\infty$ si n est impair.

2. [0,5 pt] $f'_n(x) = n(x+1)^{n-1}e^{-x} - (x+1)^n e^{-x} = (x+1)^{n-1}(n-1-x)e^{-x}$. Le facteur $n-1-x$ s'annule en $n-1$ (positif avant, négatif après); $(x+1)^{n-1}$ est positif si $n-1$ est pair, du signe de $x+1$ sinon. Le maximum local vaut $f_n(n-1) = n^n e^{1-n}$.

n impair :

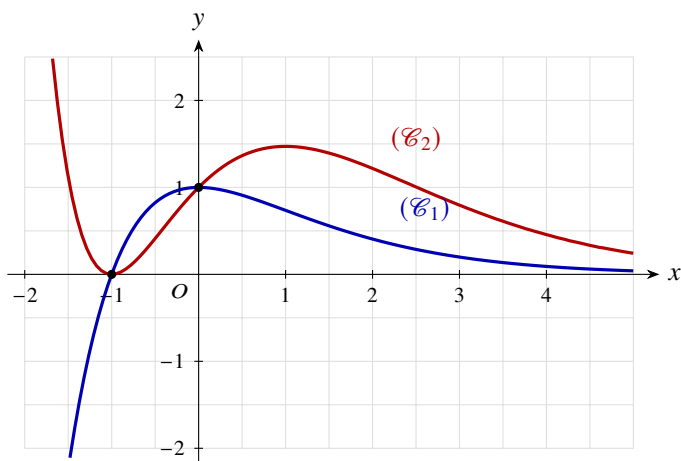
x	$-\infty$	-1	$n-1$	$+\infty$
$f'_n(x)$		+	+	0
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$

($f'_n(-1) = 0$ si $n \geq 3$, sans changement de signe; pour $n = 1$, $n-1 = 0$ et le maximum est $f_1(0) = 1$.)

n pair :

x	$-\infty$	-1	$n-1$	$+\infty$
$f'_n(x)$		-	+	0
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$

3. (a) [1 pt] Pour tout n : $f_n(-1) = 0^n e^1 = 0$ et $f_n(0) = 1^n e^0 = 1$. **Toutes les courbes passent par $(-1; 0)$ et $(0; 1)$.** Ce sont les seuls : un point commun à $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ vérifie $(x+1) = (x+1)^2$, soit $x+1 \in \{0; 1\}$.
- (b) [0,5 pt] $f_2(x) - f_1(x) = (x+1)e^{-x}[(x+1) - 1] = x(x+1)e^{-x}$, du signe de $x(x+1)$:
- sur $] -\infty; -1[$ et sur $]0; +\infty[$, $(\mathcal{C}_2)$ est au-dessus de $(\mathcal{C}_1)$;
 - sur $] -1; 0[$, $(\mathcal{C}_2)$ est au-dessous de $(\mathcal{C}_1)$;
 - elles se coupent aux points $(-1; 0)$ et $(0; 1)$.
- (c) [1 pt] $(\mathcal{C}_1)$: maximum $f_1(0) = 1$; $(\mathcal{C}_2)$: minimum 0 en -1 (tangente horizontale), maximum $f_2(1) = \frac{4}{e} \approx 1,47$. Asymptote $y = 0$ en $+\infty$ pour les deux. Figure réduite (unité du sujet : 2 cm).



Partie B

1. [0,5 pt] $f_1(x) = (x+1)e^{-x}$, $f_1'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}$, $f_1''(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x}$. Donc

$$2f_1'' - 3f_1' + f_1 = [2(x-1) + 3x + (x+1)]e^{-x} = (6x-1)e^{-x}.$$

f_1 est solution de (E_1) pour $\boxed{a=6 \text{ et } b=-1}$.

2. (a) [0,5 pt] Pour g deux fois dérivable, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} 2(f_1 + g)'' - 3(f_1 + g)' + (f_1 + g) \\ = \underbrace{2f_1'' - 3f_1' + f_1}_{(6x-1)e^{-x}} + (2g'' - 3g' + g). \end{aligned}$$

Donc $f_1 + g$ est solution de (E_1) si et seulement si $2g'' - 3g' + g = 0$, c'est-à-dire g est solution de (E_2) .

- (b) [0,75 pt] Équation caractéristique de (E_2) : $2r^2 - 3r + 1 = 0$, de racines $r_1 = 1$ et $r_2 = \frac{1}{2}$ ($\Delta = 1$). Les solutions de (E_2) sont $g(x) = \alpha e^x + \beta e^{x/2}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Toute solution y de (E_1) s'écrit $y = f_1 + (y - f_1)$ avec $y - f_1$ solution de (E_2) , d'où la solution générale de (E_1) :

$$y(x) = (x+1)e^{-x} + \alpha e^x + \beta e^{x/2}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Partie C

1. [0,75 pt] Par parties ($u = x + 1$, $v' = e^{-x}$, $v = -e^{-x}$) :

$$I_1 = \left[-(x+1)e^{-x} \right]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 e^{-x} dx = -1 + (-1 + e) = e - 2.$$

Sur $[-1; 0]$, $f_1 \geq 0$: I_1 est l'aire (en unités d'aire) du domaine limité par $(\mathcal{C}_1)$, l'axe des abscisses et les droites $x = -1$ et $x = 0$, soit $4(e - 2) \approx 2,87 \text{ cm}^2$ (1 u.a. = 4 cm^2).

2. [1 pt] $I_{n+1} - I_n = \int_{-1}^0 (x+1)^n e^{-x} [(x+1) - 1] dx = \int_{-1}^0 x(x+1)^n e^{-x} dx$. Sur $[-1; 0]$, $x \leq 0$ et $(x+1)^n e^{-x} \geq 0$: l'intégrande est négatif, donc $I_{n+1} \leq I_n$: (I_n) est décroissante. Elle est minorée par 0 (intégrale d'une fonction positive, bornes dans l'ordre croissant) : **décroissante et minorée, (I_n) converge.**

3. (a) [0,75 pt] Pour $-1 \leq x \leq 0$: $0 \leq -x \leq 1$, donc $1 \leq e^{-x} \leq e$, et $(x+1)^n \geq 0$: $(x+1)^n \leq (x+1)^n e^{-x} \leq e(x+1)^n$. On intègre sur

$$[-1; 0], \text{ avec } \int_{-1}^0 (x+1)^n dx = \left[\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{n+1} :$$

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

- (b) [0,25 pt] Les deux bornes tendent vers 0 : par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$